ΟΡΙΣΜΟΣ: f συνεχής στο $x \in E_1 \overset{\text{ορ}}{\iff} (\forall N \in \mathcal{N}_{f(x)})\ f^{-1}(N) \in \mathcal{N}_x$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Ας είναι $(E_1, \mathcal{T}_1)$ και $(E_2, \mathcal{T}_2)$ τ.χ και συνάρτηση $f: E_1 \to E_2$. Υποθέτουμε επίσης ότι f συνεχής στο $p \in E_1$ τότε $(\forall x_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ εν $E_1)$ με $x_\nu \xrightarrow{\nu \in \mathbb{N}} p$ ισχύει $f(x_\nu) \xrightarrow{\nu \in \mathbb{N}} f(p)$.
(χωρίς να ισχύει το αντίστροφο)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:
Έστω f συνεχής στο $p \in E_1$ τότε $(\forall N \in \mathcal{N}_{f(p)})\ f^{-1}(N) \in \mathcal{N}_p$.
και $x_\nu \xrightarrow{\nu \in \mathbb{N}} p$, και έστω $U \in \mathcal{N}_{f(p)}$, όμως λόγω
συνέχειας $f^{-1}(N) \in \mathcal{N}_p \xRightarrow{x_\nu \to p} x_\nu \in f^{-1}(U)$ τελικά $\forall \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_\nu) \in f(f^{-1}(U))$ τελικά $\forall \nu \in \mathbb{N} \to (f(f^{-1}(U)) \subseteq U)$
$\Rightarrow f(x_\nu) \in U$ τελικά $\forall \nu \in \mathbb{N} \xRightarrow{U \in \mathcal{N}_{f(p)}} f(x_\nu) \to f(p)$

αντιπαράδειγμα $(\not\Leftarrow)$
Έστω $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ ευκλείδειος και $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ συναριθμήσιμος
και $i_{\mathbb{R}}: (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{E})$.
Επειδή $[0,1]$ όχι αριθμήσιμο $([0,1] \not\simeq \mathbb{N})$
ισχύει $i^{-1}((-\infty,0) \cup (1,+\infty)) = ((-\infty,0) \cup (1,+\infty)) \notin \mathcal{T}$
Ενώ γνωρίζουμε ότι $(-\infty,0) \cup (1,+\infty) \in \mathcal{E}$

Συνεπώς, η ταυτοτική i ασυνεχής. Από την $\alpha_\nu \to b$ και $b \in \mathbb{R}$ και $\alpha_\nu \to b$ (ως προς την $\mathcal{T}$) $\Rightarrow \alpha_\nu = b$, τελικά $\forall \nu \in \mathbb{N}$. Άρα, είναι $i(\alpha_\nu) = i(b) = b$ τελικά $\forall \nu \in \mathbb{N}$. Οπότε, $i(\alpha_\nu) = i(b) = b$ (ως προς τον $\mathcal{E}$)

ΟΡΙΣΜΟΣ:
A κατευθυνόμενο σύνολο $\overset{\text{ορ}}{\iff}$ Υπάρχει σχέση $\preceq$ στο A αναυλαστική, μεταβατική και τέτοια ώστε $(\forall \alpha, \beta \in A)(\exists \gamma \in A): \alpha \preceq \gamma \wedge \beta \preceq \gamma$
Επίσης, $\preceq^{-1} = \succeq$

ΠΧ
Το σύνολο $\mathbb{N}$ είναι κατευθυνόμενο

Ορισμός: Αν $(E, \mathcal{T})$ τ.χ., $x \in E$ και τυχαίες $U, V \in \mathcal{N}_x$ τότε $U \succeq V \overset{\text{ορ}}{\iff} U \subseteq V$
Έτσι το $(\mathcal{N}_x, \succeq)$ κατευθυνόμενο.
Επίσης, αν U, V περιοχές στο $\mathcal{N}_x$, τότε $U \cap V \in \mathcal{N}_x$ και: $U \cap V \subseteq U$ και $U \cap V \subseteq V$ δηλαδή $U \cap V \succeq U$ και $U \cap V \succeq V$

Ορισμός: Αν A κατευθυνόμενο σύνολο και E ένα μη κενό σύνολο, μία συνάρτηση $x: A \to E$ με $\alpha \mapsto x(\alpha) = x_\alpha$ καλείται δίκτυο (net) στο E
Συμβολισμός: $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ και τα στοιχεία του A καλούνται δείκτες

Παρατήρηση: Μία ακολουθία εν E είναι δίκτυο στο E

Ορισμός: Έστω $(E, \mathcal{T})$ τ.χ. και $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ δίκτυο εν E
Λέμε ότι το δίκτυο $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ συγκλίνει στο $\ell \in E$ $(x_\alpha \to \ell)$ εάν $(\forall U \in \mathcal{N}_\ell)(\exists \alpha_0 \in A): \alpha \succeq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in U$

Παράδειγμα:
Ας είναι $(E, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος
Έτσι, για τυχόν $x \in E$, το $\mathcal{N}_x$ σε σχέση με: $U \succeq V \iff U \subseteq V$ γίνεται κατευθυνόμενο. Έστω, $\forall V \in \mathcal{N}_x$ έστω $x_V \in V$

Συνεπώς, έχουμε τη δυνατότητα να κατασκευάσουμε δίκτυο $(x_V)_{V \in \mathcal{N}_x}$ και θδο $x_V \to x$. Έστω $V_0 \in \mathcal{N}_x$. Έτσι για κάθε $V \in \mathcal{N}_x$ με $V \geq V_0 \Rightarrow V \subseteq V_0$. Άρα, $x_V \in V \subseteq V_0$ $\Rightarrow x_V \in V_0$ $\forall V \geq V_0$. Έτσι, $\forall V_0 \in \mathcal{N}_x$, $\exists$ στοιχείο του $\mathcal{N}_x$ το ίδιο το V_0 τέτοιο $\forall V : V \geq V_0 \Rightarrow x_V \in V \subseteq V_0$ Δηλ. $x_V \to x$

Πρόταση:
Έστω ο τχ $(E, \mathcal{T})$ και $S \subseteq E$ με $y \in E$ τυχόν στοιχείο
Τότε $y \in \bar{S} \iff (\exists (x_a)_{a \in A} \in \text{ν} S) : x_a \to y$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Έστω $y \in \bar{S}$ και $V \in \mathcal{N}_y \Rightarrow S \cap V \neq \phi$
$(\forall V \in \mathcal{N}_x)$ επιλέγουμε το $x_V \in S \cap V$
Τότε το $(x_V)_{V \in \mathcal{N}_y}$ δίκτυο εν S : $x_V \to y$
Αντίστροφα:
Έστω ότι $(\exists x_a)_{a \in A}$ στο S με $(x_a) \to y$.
Για κάθε $V \in \mathcal{N}_y$, $\exists a_0 \in A : a \geq a_0 \Rightarrow x_a \in V$
Συνεπώς, $\forall V \in \mathcal{N}_y$ έχουμε ότι $x_{a_0} \in S \cap V$.
Άρα $\forall V \in \mathcal{N}_y : S \cap V \neq \phi \Rightarrow \bar{S} \ni y$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Ας είναι $f : (E_1, \mathcal{T}_1) \to (E_2, \mathcal{T}_2)$ συνάρτηση. Η f συνεχής στο $y \in E_1$ αν.ν $\forall (x_a)_{a \in A}$ εν E_1 : $x_a \to y$ το δίκτυο $(f(x_a))_{a \in A}$ εν E_2 συγκλίνει στο $f(y)$ σημείο

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Έστω f συνεχής στο $y \in E_1$ και $(x_a)_{a \in A}$ δίκτυο εν E_1 τέτοιο ώστε $x_a \to y$. Έστω επίσης $V \in \mathcal{N}_{f(y)}$
Η f συνεχής στο y, $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_y$. Άρα θα $(\exists a_0 \in A)$: $x_a \in f^{-1}(V)$ $\forall a \geq a_0$. Έτσι, $f(x_a) \in V$ $\forall a \geq a_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_a) \to f(x_y)$, διότι V αυθαίρετη περιοχή εν $\mathcal{N}_{f(y)}$
Αντιστρόφως,
Έστω $\forall (x_a)_{a \in A}$ εν E_1, με $x_a \to y$ είναι $f(x_a) \to f(y)$
και έστω f ασυνεχής στο $y \in E_1 \Rightarrow \exists (V \in \mathcal{N}_{f(y)})$ $f^{-1}(V) \notin \mathcal{N}_y$
Άρα $\forall U \in \mathcal{N}_y : U \not\subseteq f^{-1}(V)$, διότι αν υπήρχε $U \in \mathcal{N}_y$ ώστε $U \subseteq f^{-1}(V)$ θα είχαμε $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_y$ (άτοπο)

Άρα,

$$\emptyset \neq U - f^{-1}(V) = U \cap (f^{-1}(V))^c = U \cap (f^{-1}(V^c)) \subseteq$$
$$\subseteq f^{-1}(f(U)) \cap f^{-1}(V^c) = f^{-1}(f(U) \cap V^c) \neq \emptyset \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(U) \cap V^c \neq \emptyset \quad \forall U \in N_y$$

Τότε, $(\forall U \in N_y)$ επιλέγουμε $x_U \in U : f(x_U) \in f(U) \cap V^c$.

· Το δίκτυο $(x_U)_{U \in N_y}$ τ/ω $x_U \to y \Rightarrow f(x_U) \to f(y)$.

Αλλά, παράλληλα $f(x_U) \notin V$, $\forall U \in N_y$ (άτοπο)

Άρα, η f συνεχής στο $y \in E_1$.

ΑΣΚΗΣΗ (ΛΥΣΗ) / ΕΡΓΑΣΙΑΣ:

Έστω $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ συναριθμήσιμος τχ και $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ εν $\mathbb{R}$ ακολουθία τυχούσα και $b \in \mathbb{R}$ τ/ω $a_\nu \to b$.

ΝΔΟ $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ τελικά σταθερή

ΛΥΣΗ

$\mathcal{T} = \{X \subseteq \mathbb{R} : X^c \text{ επ.α}\} \cup \{\emptyset\}$

$a_\nu \to b \Leftrightarrow (\forall A \in \mathcal{T})\ b \in A \Rightarrow a_\nu \in A$ τελικά $\forall \nu \in \mathbb{N}$

Έστω ότι η $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ όχι τελικά σταθερή

Έστω δίχως βλάβη της γενικότητας ότι η $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ έχει τελικά διαφορετικούς όρους και θεωρούμε το σύνολο

$A = \{a_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$ επ.α

Έτσι, $A - \{b\}$ και αυτό επ.α

Έπειτα, το σύνολο $\mathbb{R} - A = A^c \in \mathcal{T}$ ενώ ταυτόχρονα το $b \in A^c$. Άρα, $(A^c \in \mathcal{T})\ b \in A^c \Rightarrow a_\nu \notin A^c$ άτοπο

Άρα, η $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ τελικά σταθερή

3) Έστωσαν ένα μη κενό σύνολο E και μία συνάρτηση $I: P(E) \to P(E)$ η οποία πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α): $I(E)=E$

(β): $A \supseteq I(A)$

(γ): $I(I(A)) = I(A)$

(δ): $I(A\cap B) = I(A)\cap I(B)$

όπου $A, B \subseteq E$

Θεωρώντας τη συλλογή $\mathcal{R} = \{X \subseteq E : I(X) = X\}$ να αποδείξετε ότι η συλλογή $\mathcal{R}$ είναι τοπολογία στο E και τέτοια ώστε $I(S) = S^\circ$, $S \subseteq E$

ΛΥΣΗ

i) $E \in \mathcal{R}$ (αφού $I(E)=E$)

$\emptyset \in \mathcal{R}$ (αφού $\emptyset \supseteq I(\emptyset)$ και $\emptyset \subseteq I(\emptyset) \Rightarrow \emptyset = I(\emptyset)$)

ii) Έστω A και B σύνολα της $\mathcal{R}$

και ΘΔΟ $A\cap B \in \mathcal{R}$

$I(A\cap B) = I(A)\cap I(B) = A\cap B \in \mathcal{R}$

iii) Ισχύει $A\subseteq B \Rightarrow I(A) \subseteq I(B)$ (Δηλ. η I αύξουσα μονότονη)

Ας είναι η συλλογή $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{R}$ και ΘΔΟ $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{R}$

Δηλαδή θέλω νδο $I(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} A_i$

Το ότι $I(\bigcup_{i\in I} A_i) \overset{(\beta)}{\subseteq} \bigcup_{i\in I} A_i$ προφανές

Άρα, μένει νδο $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq I(\bigcup_{i\in I} A_i)$

Έχουμε ότι:

$(\forall i): A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \xRightarrow{I \text{ μονοτ.}} (\forall i): I(A_i) \subseteq I(\bigcup_{i\in I} A_i) \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} I(A_i) \subseteq I(\bigcup_{i\in I} A_i) \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \subseteq I(\bigcup_{i\in I} A_i)$

Επομένως, η συλλογή $\mathcal{R}$ ορίζει τοπολογία στο E

Τέλος, ο πυρήνας (S°) είναι το μέγιστο ανοιχτό $\subseteq S$

Αν $\underset{\text{ανοιχτό}}{B} \subseteq S \xRightarrow{I \text{ μον.}} I(B) \subseteq I(S) \xRightarrow{(*)} B \subseteq I(S)$. Δηλ. το $I(S)$ έχει ίδιες ιδιότητες με το $S^\circ \Rightarrow I(S) = S^\circ$

$(*)$ ($I(I(B)) = I(B) \Rightarrow$ Η I σταθερή $\Rightarrow I(X) = X$)